Příklady

1. Nakreslete následující množiny a parametrizuje jejich hranice.
   i. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ 9x^2 + 4y^2 \geq 4\}$.
   ii. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x^2 + y^2 \geq 4) \vee (x + y \leq 0)\}$;
   iii. $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ ((x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9) \wedge (x + y \geq 0)\}$;
   iv. M je (uzavřený) kruh se středem v $[-1, 2]$ a poloměrem 4.

2. Najděte supremum a infimum (popřípadě maximum a minimum, existují-li) funkce f na množině M.
   i. $f(x, y) = y^2 - 2y + e^{-x^2}$
   M je (uzavřený) čtverec s vrcholy v bodech $[-1, 0], [1, 0], [-1, 2], [1, 2]$;
   ii. $f(x, y) = x^2 - 2x - y^2 + 2y$
   $M = \mathbb{R}^2$;
   iii. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - xz + z^2$
   M je (uzavřená) koule se středem v $[1, 1, 1]$ a poloměrem 2;

3. Vyřešte následující slovní úlohy.
   i. Rozdělte kladné číslo a na součet dvou čísel tak, aby jejich součin byl co největší, popř. nejmenší.
   ii. Jde rozdělit kladné číslo a na součin dvou čísel tak, aby jejich součet byl co největší?
   iii. Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádru o objemu $32m^2$ tak, aby dno a stěny měly dohromady co nejmenší povrch.

Řešení některých příkladů

Příklad: $f(x,y) = \sin x \sin y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x+y = \frac{\pi}{2}\}$.
Zde množina M není kompaktní (není omezená). Z předpisu f je ale vidět, že $|f(x,y)| \leq 1$, tedy f je omezená.
M má pěknou parametrizaci

$$x = t, \;\; y = \frac{\pi}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tj. $M = \{[t, \pi/2 - t]; t \in \mathbb{R}\}$. Dosazením parametrizace do funkce f dostaneme

$$\varphi(t) = f\left(t, \frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \cos t.$$

Zde si uvědomíme, že funkce φ je 2π-periodická. Z tohoto například plyne, že φ nabývá svého maxima a minima na $\mathbb{R}$, a tedy f nabývá svého maxima i minima na M. Toto platí, jelikož spojitá φ nabývá extrémů na kompaktní množině $[0, 2\pi]$ a díky periodicitě jde i extrémy na $\mathbb{R}$.
Spočteme derivaci

$$\varphi'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Tato derivace existuje všude, tedy nutná podmínka pro lokální extrém je

$$\varphi'(t) = \cos 2t = 0, \text{ tj.} \quad t \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Tedy máme podezřelé body $\{[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}];\; k \in \mathbb{Z}\}$. Jiné podezřelé body nejsou (parametrizovali jsme celou M).
Budeme tyto body chtít dosadit do f. Nejprve si spočítáme

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} &&\text{pro } k \in \{4l; l \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 + 4l; l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{2}} &&\text{pro } k \in \{2 + 4l; l \in \mathbb{Z}\} \cup \{3 + 4l; l \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Dosadíme naše podezřelé body do f a dostaneme

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2} &&\text{pro } k \in \{4l; l \in \mathbb{Z}\} \cup \{2 + 4l; l \in \mathbb{Z}\} \\
&= \frac{-1}{2} &&\text{pro } k \in \{1 + 4l; l \in \mathbb{Z}\} \cup \{3 + 4l; l \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Tedy f nabývá svého maxima $\frac{1}{2}$ v bodech $\{[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}]; k \in \{4l; l \in \mathbb{Z}\} \cup \{2 + 4l; l \in \mathbb{Z}\}\}$ a svého minima $\frac{-1}{2}$ v bodech $\{[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2}]; k \in \{1 + 4l; l \in \mathbb{Z}\} \cup \{3 + 4l; l \in \mathbb{Z}\}\}$.